

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2026

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

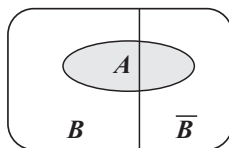
Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

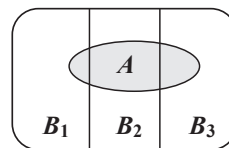
Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema Limite Central

Recolhendo uma amostra aleatória de dimensão n ($n \geq 30$) de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ , a distribuição de amostragem da média dessa amostra, $\bar{X}$, pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left[\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30

$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

- * 1. No seu blogue sobre ciclismo, o Guilherme convidou os internautas a participarem na eleição da melhor prova de ciclismo, a escolher de entre a *Vuelta a España* (E), o *Tour de France* (F) e o *Giro d'Italia* (I).

Cada internauta ordenou, uma única vez, as três provas, de acordo com a sua preferência. A ordenação efetuada por cada internauta correspondia a um voto.

Na Figura 1, apresenta-se parte de uma folha de cálculo, na qual, após concluída a votação, o Guilherme registou as três listas de preferências obtidas e o respetivo número de votos, tendo ainda calculado o número total de votos.

	A	B	C	D
1		N.º de votos		
2		24	31	45
3	1.ª preferência	F	I	E
4	2.ª preferência	I	F	F
5	3.ª preferência	E	E	I
6				
7	N.º total de votos	100		

Figura 1

Considere que a eleição da melhor prova resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada uma das provas, em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada prova recebe:
 - três pontos por cada voto na primeira preferência;
 - dois pontos por cada voto na segunda preferência;
 - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada uma das provas, e a que obtiver o maior número de pontos será eleita a melhor prova de ciclismo.

O Guilherme inseriu a fórmula $=B2+C2+D2$ para obter o número total de votos, 100, apresentado na célula B7 da Figura 1, uma vez que este valor resulta da soma dos valores registados nas células B2, C2 e D2.

Qual poderá ser a fórmula inserida pelo Guilherme para obter a pontuação total do *Tour de France*?

- (A) $=3 \times B3 + 2 \times C4 + 2 \times D4$
- (B) $=3 \times B2 + 2 \times C2 + 2 \times D2$
- (C) $=24 \times B2 + 31 \times C4 + 45 \times D5$
- (D) $=24 \times B3 + 31 \times C4 + 45 \times D4$

- * 2. Anacleto (A), Ernesto (E), Paulino (P) e Vitorino (V) são os quatro melhores ciclistas de um clube de ciclismo. Para escolher, de entre estes, o ciclista preferido, cada um dos 180 sócios desse clube votou, preenchendo um boletim de voto no qual ordenou os quatro ciclistas, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação correspondia a um voto.

Na Tabela 1, apresentam-se as quatro listas de preferências resultantes da votação e o respetivo número de votos.

Tabela 1

Votos Preferências	36	46	58	40
1. ^a	P	V	A	P
2. ^a	A	A	E	V
3. ^a	E	E	V	E
4. ^a	V	P	P	A

Considere que a escolha do ciclista preferido resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada ciclista, como primeira preferência, e verifica-se se algum deles obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, esse ciclista é o escolhido como preferido.
- Caso contrário, elimina-se o ciclista menos votado como primeira preferência. Se existir empate entre ciclistas menos votados como primeira preferência, o ciclista a eliminar é determinado por sorteio. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, os ciclistas que ocupavam os lugares abaixo do ciclista eliminado sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que um dos ciclistas obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Um dos ciclistas obtém maioria absoluta de votos na primeira preferência se tiver, no mínimo, (a) votos.

Aplicado o método descrito, o primeiro ciclista a ser eliminado foi (b), e o segundo foi (c).

Após estas eliminações, o ciclista escolhido como preferido obteve (d) votos.

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 89	(1) A	(1) A	(1) 94
(2) 90	(2) E	(2) P	(2) 104
(3) 91	(3) P	(3) V	(3) 134

* 3. Nas etapas da Volta a Portugal em Bicicleta, a assistência técnica aos ciclistas é assegurada por carros de apoio.

O Álvaro, a Manuela e a Paula são três voluntários que colaboram na organização da Volta e são responsáveis por garantir que os 14 carros de apoio cumprem as normas de segurança definidas.

Para decidir os carros a atribuir a cada voluntário, foi utilizado o método a seguir descrito.

- Atribui-se um código a cada um dos carros, C1, C2, C3, ..., C14, e anota-se o código de cada carro num cartão. De seguida, dispõem-se os catorze cartões em linha, por ordem crescente de numeração.
- Cada voluntário dispõe de dois marcadores para dividir a linha de cartões em três partes, de modo secreto e que considera justo.
- Depois, revelam-se os marcadores de cada voluntário e percorre-se a linha de cartões, partindo do cartão mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador. Se nesse local existir mais do que um marcador, seleciona-se um desses marcadores ao acaso. Ao voluntário que colocou esse marcador serão atribuídos os carros cujos códigos estão registados nos cartões à esquerda do mesmo. Esse voluntário já tem a sua parte.
- De seguida, percorre-se a linha de cartões, sempre da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois voluntários. Se nesse local existir mais do que um marcador, seleciona-se um desses marcadores ao acaso. Ao voluntário que colocou esse marcador serão atribuídos os carros cujos códigos estão registados nos cartões compreendidos entre os seus primeiro e segundo marcadores.
- Ao voluntário que resta, serão atribuídos os carros cujos códigos estão registados nos cartões situados à direita do seu segundo marcador.
- Se sobraem cartões, os carros cujos códigos estão registados nesses cartões serão atribuídos por sorteio.

Na Figura 2, estão representados:

- a linha de cartões, já ordenada;
- os marcadores da Manuela, M1 e M2;
- o primeiro marcador do Álvaro, A1, e o primeiro marcador da Paula, P1;
- os segundos marcadores do Álvaro e da Paula, X e Y, não necessariamente por esta ordem.

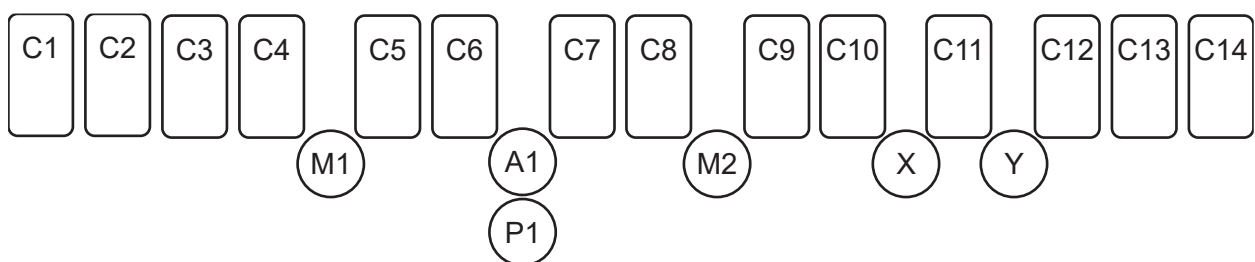


Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

Sem contabilizar os carros que serão atribuídos por sorteio, o número mínimo de carros atribuídos a um voluntário é **(a)** , ficando a Manuela responsável pelos carros **(b)** .

Os carros **(c)** são dois dos carros sorteados entre os três voluntários.

Se o carro C9 for atribuído à Paula, então o número mínimo de carros atribuídos a essa voluntária, incluindo o carro C9, é **(d)** .

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) dois	(1) C1, C2, C3 e C4	(1) C5 e C6	(1) dois
(2) três	(2) C5, C6, C7 e C8	(2) C7 e C8	(2) três
(3) quatro	(3) C9, C10, C11, C12, C13 e C14	(3) C10 e C11	(3) quatro

4. O André pretende comprar equipamento para a prática de ciclismo. Para tal, solicitou ao seu gestor de conta bancária informações sobre as condições oferecidas pelo banco para um crédito de 5000 €.

O gestor informou-o de que a taxa de juro mensal era 4% e de que o valor da prestação fixa mensal seria dado pela expressão

$$P = \frac{V_f \times i}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Em que:

P – valor, em euros, da prestação fixa mensal, com arredondamento aos centimos;

V_f – valor financiado, em euros;

i – taxa de juro mensal, na forma de dízima;

n – número de prestações.

O gestor propôs ao André um valor de prestação fixa mensal que lhe possibilitava liquidar o crédito em 24 prestações. Perante o valor da prestação proposto, o André constatou que tinha disponibilidade financeira para pagar, mensalmente, uma prestação cujo valor poderia ir até ao dobro do valor da prestação apresentado, diminuindo, assim, o número de prestações.

Determine, recorrendo a uma tabela obtida com recurso à sua calculadora, o número mínimo de prestações que o André poderia pagar, de acordo com a sua disponibilidade financeira e atendendo à expressão apresentada.

Na sua resposta, apresente:

- as linhas relevantes da tabela que permita obter o valor solicitado;
- o valor da prestação proposto ao André pelo gestor de conta, arredondado aos centimos.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

- * 5. O ciclismo de pista é uma modalidade que, nos jogos olímpicos, inclui seis provas disputadas num velódromo: velocidade por equipas (E), velocidade individual (I), *keirin* (K), *madison* (M), *omnium* (O) e perseguição por equipas (P).

Num encontro sobre ciclismo, vão realizar-se, num determinado dia, 6 sessões de esclarecimento, uma por cada uma das referidas provas.

Cada sessão contará com a presença de elementos da direção de um clube de ciclismo e, de modo a planificar o dia das sessões, solicitou-se a cada um deles a inscrição em uma ou mais sessões, de acordo com os seus interesses.

Para que todos os elementos da direção possam estar presentes nas sessões em que se inscrevem, serão criados blocos de sessões que podem ocorrer em simultâneo.

Na Tabela 2, apresentam-se as inscrições dos elementos da direção.

Tabela 2

E	I	K	M	O	P
Alice	César	César	César	Alice	Gil
Rui	Dora	Fábio	Gil	Fábio	Hugo
Vasco	Rui	Sara	Rui	Júlia	Júlia

Respeitando as inscrições dos elementos da direção, construiu-se um grafo que modela a situação.

Determine o número mínimo de blocos de sessões que, nestas condições, vão permitir ao ciclista português lúri Leitão estar presente nas sessões sobre *omnium* e *madison*, provas em que foi medalhado nos Jogos Olímpicos de 2024.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que modele a situação;
- a constituição de cada bloco de sessões.

6. O canal Bicla e o canal Novelas são dois canais televisivos temáticos, que transmitem, respetivamente, provas de ciclismo e telenovelas.

Certo dia, o canal Bicla transmitiu em direto a primeira etapa da Volta a Portugal em Bicicleta, no programa Voltas, cuja duração foi de três horas.

Admita que, t minutos após o início do programa Voltas, o número de televisores, em milhares, ligados no canal Bicla (B) é dado, com arredondamento às milésimas, pela expressão

$$B(t) = 20 + 150(1 - e^{-0,02t})$$

- * 6.1. O *share* de um programa, num determinado momento, corresponde à percentagem de televisores que estão ligados e a transmitir esse programa, em relação ao número total de televisores ligados nesse momento. Por exemplo, se, num determinado momento, um programa tem 10% de *share*, isso significa que, do número total de televisores que estão ligados nesse momento, 10% estão a transmitir esse programa.

A evolução do *share* do programa Voltas, t minutos após o início do programa, pode ser modelada por uma função, S , cuja representação gráfica é apresentada na Figura 3.

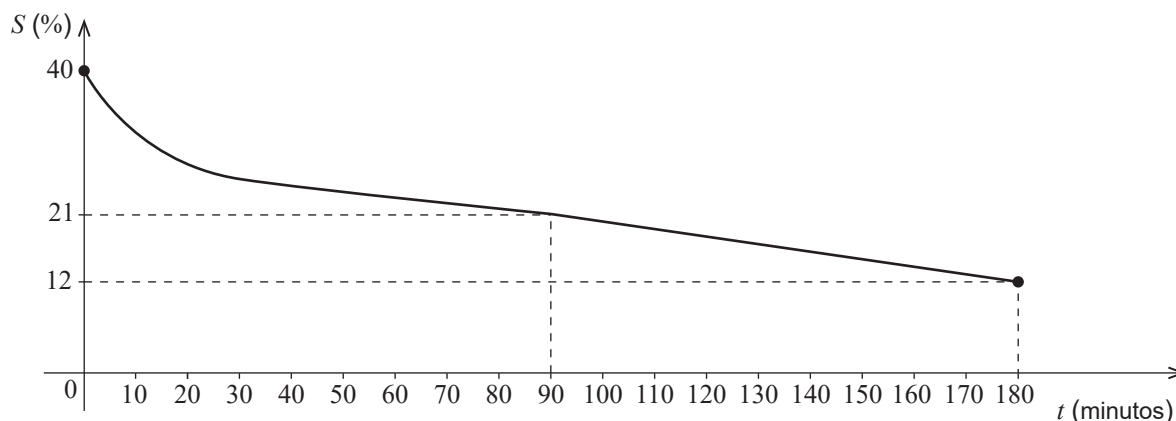


Figura 3

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

No início do programa Voltas, (a) de televisores estavam ligados no canal Bicla.

O *share* do programa Voltas, desde o seu início até ao fim, diminuiu (b).

Decorridos 30 minutos desde o início do programa Voltas, o número total de televisores ligados poderia ser (c).

No fim do programa Voltas, o número total de televisores ligados situava-se entre (d).

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) 20 milhares	(1) 19%	(1) 209 260	(1) 1100 e 1200 milhares
(2) 35 milhares	(2) 28%	(2) 350 712	(2) 1200 e 1300 milhares
(3) 43 milhares	(3) 40%	(3) 487 100	(3) 1300 e 1400 milhares

- * 6.2. Admita que, t minutos após o início do programa Voltas, o número de televisores, em milhares, ligados no canal Novelas (N) é dado, com arredondamento às milésimas, pela expressão

$$N(t) = 24 + 0,01(80 - t)^2$$

Houve um momento, após o início da transmissão do programa Voltas, em que o número de televisores ligados nos dois canais foi igual.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, o número de televisores ligados no canal Bicla decorridos 5 minutos após esse momento.

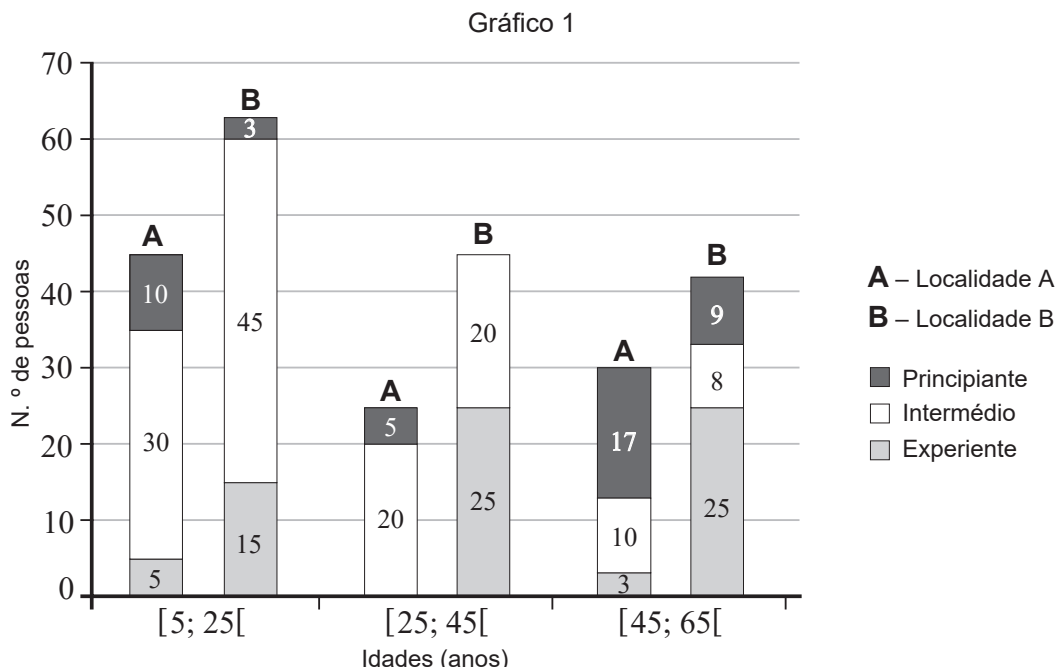
Na sua resposta:

- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) visualizado(s) e assinale o(s) ponto(s) relevante(s);
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

7. Em duas localidades, A e B, foram realizadas, em simultâneo, sessões de prevenção rodoviária para ciclistas, sujeitas a inscrição. No boletim de inscrição dessas sessões, solicitava-se que cada pessoa indicasse a sua idade e, relativamente à sua aptidão para o ciclismo, que assinalasse o seu nível, escolhendo entre Principiante, Intermédio ou Experiente.

No Gráfico 1, estão representados os dados relativos à idade, em anos completos, das 100 pessoas inscritas na localidade A e das 150 pessoas inscritas na localidade B, bem como o nível de aptidão que cada uma assinalou. As idades estão agrupadas nas classes $[5, 25[$, $[25, 45[$ e $[45, 65[$.



- * 7.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

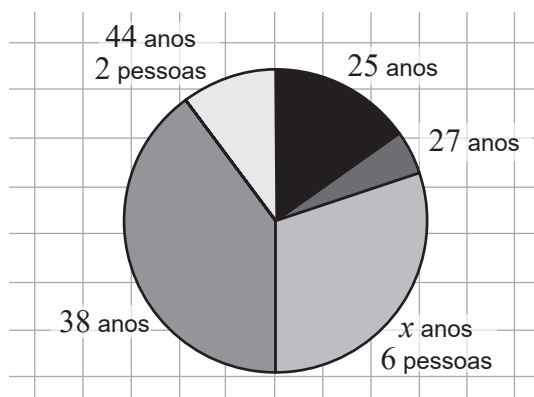
O nível de aptidão para o ciclismo mais assinalado no boletim de inscrição pelas pessoas inscritas na localidade B e cuja idade pertence à classe $[5, 25[$ foi **(a)** .
 Considerando o conjunto das pessoas inscritas nas duas localidades, o número de pessoas que tinham idade superior ou igual a 25 anos e assinalaram o nível Principiante é igual a **(b)** . A percentagem de pessoas que, na localidade A, assinalaram o nível Intermédio e cuja idade pertence à classe **(c)** é igual à percentagem de pessoas que, na localidade B, assinalaram o mesmo nível de aptidão para o ciclismo e têm idade pertencente à mesma classe.

Admitindo que as idades se distribuem uniformemente em cada classe, há 3 anos, a média de idades, em anos, das pessoas que, na localidade A, assinalaram o nível Principiante era igual a **(d)** .

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) Principiante	(1) 9	(1) $[5, 25[$	(1) 24,375
(2) Intermédio	(2) 22	(2) $[25, 45[$	(2) 27,375
(3) Experiente	(3) 31	(3) $[45, 65[$	(3) 36,375

7.2. No Gráfico 2, estão parcialmente registadas as idades, em anos completos, das 20 pessoas que, na localidade B, se inscreveram nas sessões de prevenção rodoviária, que tinham idade pertencente à classe $[25, 45[$ e que assinalaram o nível Intermédio de aptidão para o ciclismo.

Gráfico 2



Admita que, no conjunto dos dados representados no Gráfico 2:

- 20% dizem respeito a pessoas com idade inferior ou igual a 27 anos;
- a idade mediana é igual a 34 anos;
- o valor de x pertence ao intervalo $]27, 38[$.

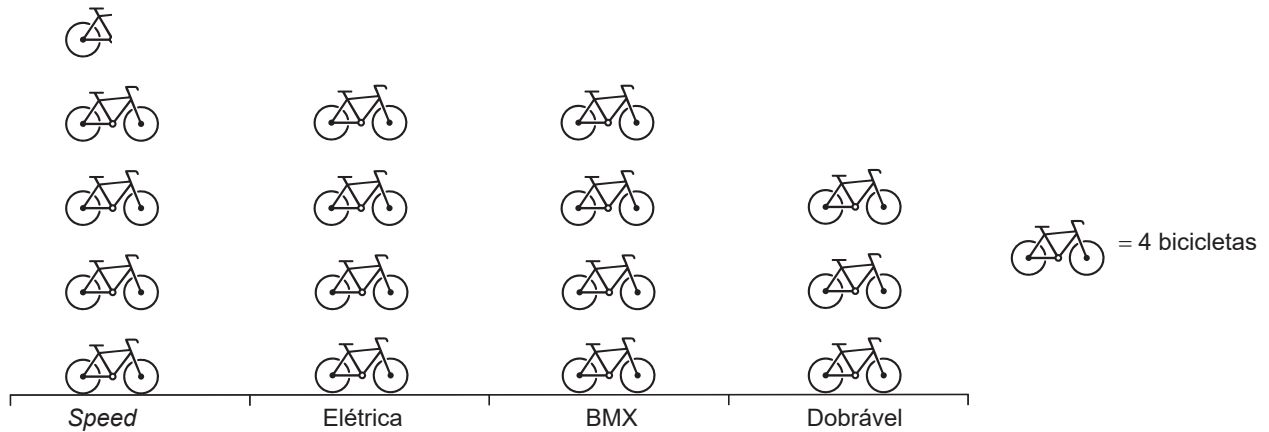
Determine o valor de x .

- * 8. Numa loja, cada bicicleta que está à venda é catalogada numa das categorias seguintes: *Speed*, Elétrica, BMX ou Dobrável.

Numa determinada semana, foram vendidas, nessa loja, 72 bicicletas.

No Gráfico 3, encontra-se organizada, por categorias, a contagem das 62 bicicletas vendidas até ao penúltimo dia dessa semana.

Gráfico 3



Considerando o conjunto das bicicletas vendidas no último dia dessa semana, o número de bicicletas da categoria Elétrica é o dobro do número de bicicletas da categoria *Speed*.

Considere que o conjunto de dados referentes a essa semana admite uma única moda, que é a categoria Elétrica.

Quantas bicicletas da categoria *Speed* foram vendidas no último dia?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

- * 9. Num programa televisivo que acompanha a Volta a Portugal em Bicicleta, é apresentado um jogo, no qual um concorrente retira, ao acaso, uma bola de uma caixa contendo bolas numeradas. Em função do número retirado, é atribuído um prémio monetário.

Considere que a caixa utilizada no jogo contém seis bolas numeradas, como é ilustrado na Figura 4.

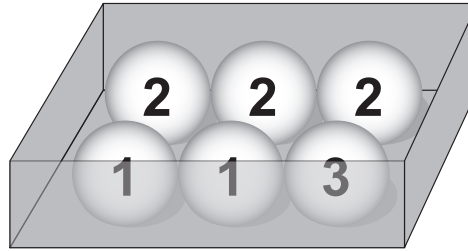


Figura 4

Seja X a variável aleatória «número da bola extraída».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

10. Algumas câmaras municipais dos concelhos que fazem parte do traçado da Volta a Portugal em Bicicleta organizam provas de ciclismo locais para divulgação da modalidade.

10.1. Dos ciclistas que participaram na prova organizada por um determinado município, verificou-se que:

- 80% eram ciclistas amadores;
- dos ciclistas que não eram amadores, 60% residiam no concelho;
- dos ciclistas amadores, 3 em cada 40 não residiam no concelho.

Escolheu-se, ao acaso, um dos ciclistas que participou nesta prova.

Determine a probabilidade de esse ciclista residir no concelho.

Apresente o resultado na forma de dízima.

10.2. Nas várias edições de uma destas provas, participaram 1000 pessoas. O tempo que estas 1000 pessoas demoraram a completar a prova pode ser aproximado por um modelo normal, com valor médio de 135 minutos e desvio padrão de 10 minutos.

Determine o número de pessoas que se espera que tenham demorado, no mínimo, 115 minutos a completar a prova.

Apresente o valor solicitado, com arredondamento às unidades.

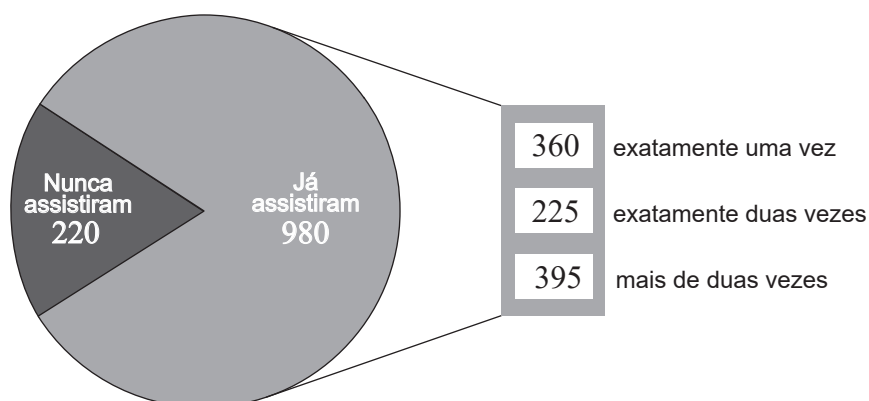
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

* 11. A Volta a Portugal em Bicicleta passa habitualmente numa determinada localidade.

Constituiu-se uma amostra aleatória de habitantes dessa localidade. Questionaram-se as pessoas que faziam parte dessa amostra, com o objetivo de saber se já tinham assistido à passagem da Volta e, em caso afirmativo, quantas vezes o tinham feito.

No Gráfico 4, apresentam-se os resultados recolhidos.

Gráfico 4



Determine o intervalo de confiança a 95% para a proporção de habitantes daquela localidade que assistiu à passagem da Volta a Portugal em Bicicleta exatamente uma vez.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	8.	9.	11.	Subtotal
Cotação (em pontos)	15	15	15	19	15	19	15	15	15	19	162
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.		7.2.			10.1.		10.2.			Subtotal
Cotação (em pontos)	2 x 19 pontos										38
TOTAL											200

Prova 835

2.^a Fase