

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2026
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

13 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

* 1. Para certos números reais a e b ($a > 1$ e $b > 0$), tem-se $\log_a(b^2) = 16$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$?

- (A) -7
- (B) -3
- (C) 5
- (D) 9

2. Seja f uma função real, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, f' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por

$$f'(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$$

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

* 2.1. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico da função f , caso este(s) exista(m).

2.2. Considere, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto A , de coordenadas $(e, 2)$;
- a reta s é perpendicular à reta r e intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa -3 ;
- a reta s intersecta o eixo Oy no ponto B .

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **3.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **3.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

*** 3.(AE2018)**

Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$), tais que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$.

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,4
- (B) 0,6
- (C) 0,8
- (D) 1

*** 3.(AE2023)**

Admita que o preço de uma refeição, numa cantina, pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição normal, de valor médio 7 euros.

A probabilidade de, nessa cantina, se pagar por uma refeição mais do que 9 euros é igual a 12%.

A Carla almoçou nessa cantina.

Qual é a probabilidade de a Carla ter pagado, pela refeição, um valor entre 7 e 9 euros?

- (A) 24%
- (B) 38%
- (C) 44%
- (D) 68%

- * 4. O Instituto Nacional de Estatística (INE) realiza, de forma periódica, o Inquérito às Despesas das Famílias, o qual permite analisar o modo como os agregados familiares portugueses distribuem as suas despesas.

Na tabela seguinte, apresentam-se as percentagens da despesa anual média associadas à habitação e à alimentação, em relação à despesa total anual média por agregado familiar, em seis anos do período entre 1989 e 2023.

Ano	Despesa anual média em habitação (%) (x)	Despesa anual média em alimentação (%) (y)
1989/1990	12,4	29,5
1994/1995	20,6	21,0
2005/2006	26,6	15,5
2010/2011	29,2	13,3
2015/2016	31,9	14,3
2022/2023	39,0	12,9

Fonte: www.ine.pt (consultado em setembro de 2025).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

O desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à habitação é (a) ao desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à alimentação.

De acordo com dados do INE, em 2022/2023, a despesa anual média associada à alimentação foi 3121 euros. Considerando os dados da tabela, em 2022/2023, a despesa anual média associada à habitação, arredondada às unidades, foi (b) euros.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é (c).

Em 2000, a despesa anual média associada à habitação foi 19,8% da despesa total anual média. Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, estima-se que a percentagem da despesa anual média associada à alimentação, em relação à despesa total anual média, em 2000, foi, aproximadamente, (d) (valor arredondado às décimas).

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) inferior	(1) 1217	(1) -0,93	(1) 20,2%
(2) igual	(2) 4338	(2) -0,88	(2) 22,2%
(3) superior	(3) 9436	(3) 0,86	(3) 35,0%

5. Considere todos os números naturais com cinco algarismos diferentes.

Determine quantos destes números são múltiplos de 5 e maiores do que 50 000 .

* 6. Numa caixa, estão vários cartões. Cada cartão está numerado com um número inteiro positivo.

Relativamente aos números inscritos nesses cartões, sabe-se que:

- 62,5% são múltiplos de três;
- um terço dos que não são múltiplos de três são pares.

Selecionou-se, ao acaso, um cartão dessa caixa.

Determine a probabilidade de esse cartão estar numerado com um múltiplo de três ou com um número ímpar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 7.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O **item 7.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

* 7.(AE2018)

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \frac{3n+5}{n+2}$$

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

* 7.(AE2023)

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 e^x - \frac{1}{2}$.

A função f é contínua e tem exatamente um zero no intervalo $] -2, 0[$.

Determine, pelo método de Newton-Raphson, a aproximação desse zero obtida na primeira iteração, partindo do valor inicial $x_0 = -1$.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

8. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

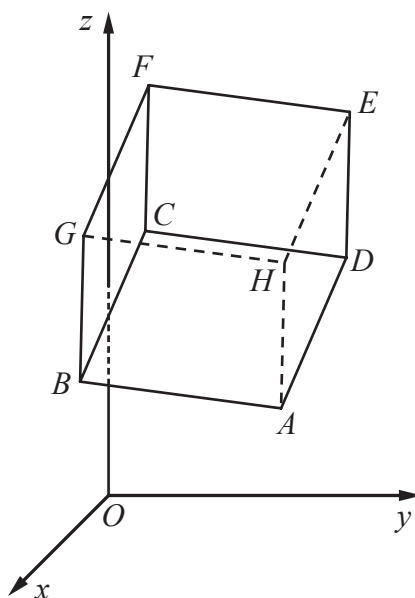


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-3, 5, 2)$;
- o plano BCF é definido pela equação $-3x + 6y - 2z + 14 = 0$.

*** 8.1.** Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} < 0$
- (B) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$
- (C) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$
- (D) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} > 0$

*** 8.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cubo $[ABCDEFGH]$.

9. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. Oxy , o retângulo $[ABCD]$.

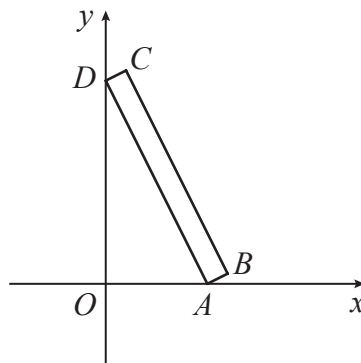


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto D pertence ao eixo Oy ;
- a reta BC é definida pela equação reduzida $y = -2x + 5$.

Determine as coordenadas do ponto C .

* 10. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, contínua e diferenciável.

Sabe-se que:

- $f(0) = 2$;
- $f(1) \times f(2) < 0$;
- $f'(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Considere as proposições seguintes.

I. $f(1) > 2$.

II. O domínio da função $\frac{1}{f}$ é $\mathbb{R}$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

- * 11. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Na Figura 3, estão representados, no plano complexo, o ponto P , afixo de z , e outros quatro pontos, A , B , C e D .

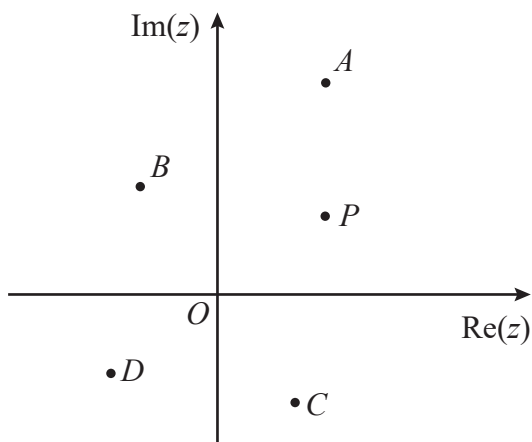


Figura 3

Qual desses quatro pontos pode ser o afixo do número complexo iz ?

- (A) Ponto A
- (B) Ponto B
- (C) Ponto C
- (D) Ponto D

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números z e w , tais que $z = \frac{w}{3-4i}$, com $|w| = 5$ e $\text{Re}(w) < 0$.

Sabe-se que $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$.

Determine w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

13.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **13.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **13.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

13.(AE2018)

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f , de domínio $[0, a]$, com $a > 0$, definida por

$$f(x) = \sin(2x) + \cos x$$

Determine o menor valor de a para o qual a função f tem, exatamente, vinte zeros.

13.(AE2023)

Na Figura 4, estão representados o triângulo $[PQR]$ e os pontos B , C e S .

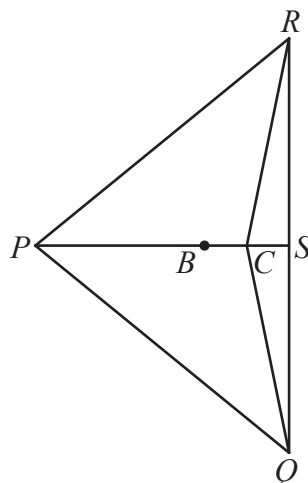


Figura 4

Sabe-se que:

- os pontos B e C são, respetivamente, o baricentro e o circuncentro do triângulo $[PQR]$;
- o ponto S é o ponto médio do segmento de reta $[RQ]$;
- o ponto C pertence ao segmento de reta $[PS]$;
- $\overline{PR} = \overline{PQ}$, $\overline{PB} = 6$ e $\overline{QR} = 6\sqrt{6}$.

Determine $\overline{CS}$.

- * 14. Na Figura 5, está representado um cone reto, com raio da base r e apótema a , sendo r e a dois números reais positivos, com $r < a$. Estão também representados, na base do cone, dois pontos, A e B , sendo o segmento de reta $[AB]$ um diâmetro dessa base.

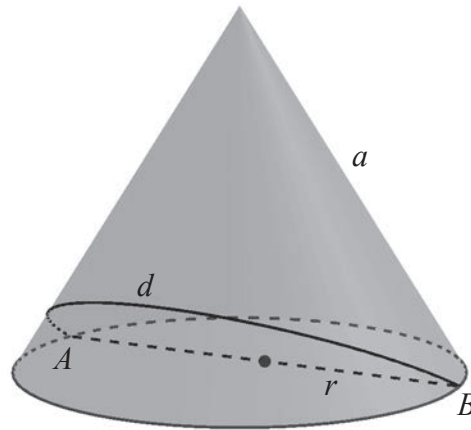


Figura 5

Designando por x o quociente entre o raio da base e o apótema, sabe-se que a distância, d , entre os pontos A e B , pela superfície do cone, é dada pela expressão

$$d(x) = \frac{2r}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \text{ com } x \in]0, 1[$$

Determine, recorrendo à calculadora, o quociente entre o raio da base e o apótema quando a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o diâmetro da base do cone.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

15. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, e a reta r , de equação $y = -x + 2$, assíntota ao gráfico da função f .

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g(x) = f(x) + \frac{x + e^x}{e^x}$$

Determine uma equação da assíntota não vertical ao gráfico da função g .

- * 16. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e o ponto D .

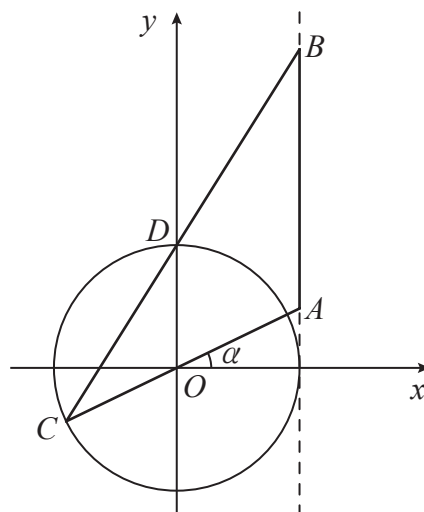


Figura 6

Sabe-se que:

- A é um ponto pertencente à reta de equação $x = 1$, de ordenada positiva;
- α é a inclinação da reta OA , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- C é o ponto de intersecção da reta OA com a circunferência, de coordenadas negativas;
- D é o ponto de coordenadas $(0, 1)$;
- B é o ponto de intersecção da reta de equação $x = 1$ com a reta CD .

Mostre que

$$\overline{AB} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	3.	4.	6.	7.	8.1.	8.2.	10.	11.	14.	16.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	12	14	14	12	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.2.		5.		9.		12.		13.		15.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200

Prova 635

2.^a Fase